

机密★启用前

四川轻化工大学 2024 年研究生招生考试业务课试卷

(满分: 150 分, 所有答案一律写在答题纸上)

适用专业: 0701 数学

考试科目: 601 数学分析 A 卷

考试时间: 3 小时

一、(本题满分 40 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cos n =$ _____.
2. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续, 则 $k =$ _____.
3. 不定积分 $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x + 2)^2} dx =$ _____.
4. 曲线 $y = \frac{3x^3 + 4}{x^2 - 2x}$ 的斜渐近线为: _____.
5. 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 的精确定义是: _____.
6. 设 f 为可导函数, $y = f(e^x)e^{f(x)}$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.
7. 线密度为 $\rho(x, y, z)$ 的空间曲线 L 状物体的质量用线积分表示为 $M =$ _____.
8. 若 $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$, 则二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 的几何意义为: _____.

二、(本题满分 40 分, 每小题 10 分) 计算下列各题

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (3^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n+1}})$.
2. 求方程 $xyz^3 + x^2 + y^3 - z = 0$ 所确定隐函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(0, 1)$ 处的全微分 $dz|_{(0,1)}$ 、梯度 $\text{grad } z|_{(0,1)}$ 及该点的最大方向导数.
3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数.
4. 计算面积分 $\iint_S z dS$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的上半部分.

三、(本题满分 12 分) 讨论反常积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx$ 的敛散性.

四、(本题满分 10 分) 设 $a_n = \frac{\sin 1}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\sin n}{n(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 试用柯西收敛准则证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

五、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

六、(本题满分 10 分) 用积分判别法证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}}$ 收敛.

七、(本题满分 14 分) 设 $b > a > 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi);$$

(2) 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{(b+a)f'(\xi)}{2\xi}.$$

八、(本题满分 14 分) 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 上, 求函数

$$f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$$

的最大值, 并利用结果证明不等式:

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5 \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$