

机密★启用前

四川轻化工大学 2024 年研究生招生考试业务课试卷

(满分: 150 分, 所有答案一律写在答题纸上)

适用专业: 0701 数学

考试科目: 808 高等代数 A 卷

考试时间: 3 小时

(试题 A 卷 请将答案写在答题纸上)

一、填空 (每题 5 分, 共 30 分)

1. 矩阵乘积  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2023} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2024} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 已知  $A$  是三阶矩阵, 且  $A$  的行列式  $|A| = 3$ , 则  $|2A^* - 3A^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 若三阶方阵  $A, B$  满足  $B^{-1}AB = 4B + AB$ , 且  $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ , 则  $A = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 实数域  $\mathbb{R}$  上的欧氏空间  $\mathbb{R}^3$  中, 内积定义为  $(\alpha, \beta) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ , 其中  $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $\beta = (y_1, y_2, y_3)^T$ , 则当  $k = \underline{\hspace{2cm}}$  时, 向量  $\alpha = (0, 1, 3)^T$  与向量  $\beta = (2, -1, k)^T$  正交。

5. 已知实数域上的三元二次型  $f(t_1, t_2, t_3) = 4t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 2\alpha t_1t_2 + 2t_1t_3$  正定, 则参数  $\alpha$  的取值范围为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

6. 多项式  $f(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$  的有理根为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、已知三元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 1, 且三个解向量  $X_1, X_2, X_3$  满足  $X_1 + X_2 = (1, 2, 3)^T$ ,  $X_2 + X_3 = (0, -1, 2)^T$ ,  $X_1 + X_3 = (1, 0, -1)^T$ , 求该非齐次线性方程组的通解, 并找出一个满足上述条件的方程组。 (20 分)



三、已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关, 试证: 当  $n=2023$  和  $n=2024$  时, 向量组

$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, \alpha_n + \alpha_1$  分别是线性无关和线性相关的。

(15 分)

四、设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是线性空间  $V$  的一组基,  $T$  是  $V$  上的线性变换, 且

$$\begin{cases} T(\alpha_1) = 5\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 \\ T(\alpha_2) = -2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ T(\alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 \\ T(\alpha_4) = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 \end{cases}$$

求  $T$  的值域  $T(V)$  的维数和一组基,  $T$  的核  $T^{-1}(0)$  的维数和一组基。

(15 分)

五、设  $A$  是数域  $P$  上的  $n$  阶可逆矩阵。证明: 存在数域  $P$  上的多项式  $f(x)$  使得

$$A^{-1} = f(A)。$$

(15 分)

六、设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 其中  $a_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$  都是整数, 且对每一个  $i = 1, \dots, n$ , 都有

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 2024, \text{ 证明 } 2024 \text{ 整除 } |A|。$$

(10 分)

七、已知  $n$  维向量  $\alpha = (m, 0, \dots, 0, m)^T$ ,  $A = E - \alpha\alpha^T$ ,  $B = E + \frac{1}{m}\alpha\alpha^T$  ( $E$  为单位矩阵), 且  $AB = E$ , 求参数  $m$ 。

(15 分)

八、探索题 (30 分)

设  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$  (其中  $\mathbb{C}$  是复数集), 若存在矩阵  $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$  使得

$$GA = E_n \text{ (或 } AG = E_m \text{),}$$

则称  $G$  是  $A$  的左逆矩阵 (或右逆矩阵)。记  $A$  的左逆矩阵为  $A_L^{-1}$ , 右逆矩阵为  $A_R^{-1}$ 。

如果  $A$  有左逆矩阵 (或右逆矩阵), 则称  $A$  是左可逆 (或右可逆) 的。

现在令  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 判断  $A_L^{-1}$  和  $A_R^{-1}$  是否存在。若存在, 求出来; 若不存在,

说明理由。判断正确得 5 分/个, 求出来或说明不存在的理由, 得 5 分/个。若能例举出存在  $A_L^{-1}$  或  $A_R^{-1}$  的其他矩阵, 每举出一个例子得 5 分。此题得分上限为 30 分。