

机密★启用前

## 四川理工学院 2019 年研究生招生考试业务课试卷

(满分: 150 分, 所有答案一律写在答题纸上)

适用专业: 0701 数学

考试科目: 601 数学分析 A 卷

考试时间: 3 小时

### 一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 5 分)

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + 3^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设二元可微函数  $f(x, y)$  满足  $f(x, x^2) = 5$  且  $f_x(x, x^2) = 2x$ , 则  $f_y(x, x^2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设  $f$  为连续函数, 则  $\iint_{x^2+y^2 \leq 2} [2 + xf(x^2 + y^2)] dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda \neq 0$ , 则此幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{2n}$  的收敛半径为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

5. 函数  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$  在点  $(1, 1)$  处沿方向  $s = \underline{\hspace{2cm}}$  的方向导数最大.

6. 设函数  $y = f(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$  所确定, 则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

### 二、计算题 (本题满分 40 分, 每小题 8 分)

1. 已知光滑曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, 0)$  处的切线在  $y$  轴上的截距为  $-1$ , 求

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]^n$  的值.

(共 3 页, 第 1 页)



2. 计算积分  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

3. 展开  $\frac{d}{dx} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)$  为  $x$  的幂级数, 求出它的收敛区间, 并求级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$  的和.

4. 计算  $\iint_S \frac{x^3}{3} dydz + \frac{y^3 + z}{3} dzdx + xy dx dy$ , 其中  $S$  是曲线  $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴

旋转而成的曲面与  $z = 2$  及  $z = 8$  所围封闭曲面取外侧.

5. 计算二重积分  $\iint_D \frac{3x}{y^2 + xy^3} dx dy$ , 其中  $D$  由  $xy = 1, xy = 3, y^2 = x, y^2 = 3x$

所围成区域.

三、证明题 (本题满分 12 分)

设  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right), n = 1, 2, 3, \dots$ , 证明:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  收敛.

四、证明题 (本题满分 12 分)

设函数  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , 证明: (1)  $f(x)$  在  $[a, 1)$  (其中  $a > 0$ ) 上一致

连续; (2)  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上一致连续.

五、证明题 (本题满分 12 分)

(1) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  可微, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ ,

使  $f(\xi) = f'(\xi)$ .



(2) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上存在  $n+1$  阶导数, 且

$$f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

其中  $f^{(0)}(a) = f(a)$ ,  $f^{(0)}(b) = f(b)$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(\xi) = f^{(n+1)}(\xi).$$

#### 六、证明题 (本题满分 12 分)

(1) 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明: 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

(2) 证明: 题 (1) 中  $\xi \in (a, b)$  也成立.

#### 七、应用题 (本题满分 10 分)

设光滑封闭曲面  $S: F(x, y, z) = 0$ , 证明: 曲面  $S$  上任何两个相距最远点处的切平面相互平行, 且垂直于这两点的连线.

#### 八、讨论题 (本题满分 10 分)

$$\text{试讨论函数 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \text{ 在 } (0, 0) \text{ 处的连续性、}$$

偏导存在性及可微性.

#### 九、证明题 (本题满分 12 分)

设可微函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $x_0 \in [a, b]$  收敛,  $\{f'_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 证明:  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛.