

四川理工学院 2019 年研究生入学考试业务课样卷

(满分: 150 分, 所有答案一律写在答题纸上)

招生专业: 基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论

考试科目: 数学分析

考试时间: 3 小时

一. 填空题 (本题满分 30 分, 每小题 5 分)

1. 设 $\frac{d}{dx} \int_0^{e^{-x}} f(t) dt = e^x$, 则 $f(x) =$ _____.

2. 设 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)}$. 则 $\int f(x) dx =$ _____.

3. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

4. 已知积分 $\oint_L xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续导数, 且 $\varphi(0) = 0$, 则 $\varphi(x) =$ _____.

5. 曲线 $\begin{cases} 3x^2y + y^2z = -2 \\ 2xz - x^2y = 3 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处的切线方程为 _____.

6. 设 $f(x, y)$ 可微, $f(1, 1) = 1$, $f_x(1, 1) = a$, $f_y(1, 1) = b$, 令

$$\phi(x) = f(x, f(x, f(x, x)))$$

则 $\phi'(1) =$ _____.

二. 计算题 (本题满分 40 分, 每小题 8 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx.$

3. 已知 $f(x+y, x-y) = x^2 - xy + y^2$, 求 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$.

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的收敛域与和函数.

5. 计算 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是不经过原点的任意闭曲线.

三、(本题满分 10 分) 设 $0 < r \leq 2R$, 求球面 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = r^2$ 在球 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 内部分曲面的面积表达式. 并求 r 取何值时, 该面积最大?

四、(本题满分 10 分) 设 $a > 0, 0 < x_1 < \frac{1}{a}, x_{n+1} = x_n(2 - ax_n), n = 1, 2, 3, \dots$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

五、(本题满分 12 分) 试讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 的连续

性、偏导存在性及可微性.

六、(本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界, 证明:

$$(1) \exists \{x_n\} \in [a, b], \text{ 使 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

$$(2) \exists c \in [a, b], \text{ 使得 } \forall \delta > 0, f(x) \text{ 在 } (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b] \text{ 上无界.}$$

七、(本题满分 12 分) 设 $u_1(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $u_{n+1}(x) = \int_a^x u_n(t) dt, n = 1, 2, 3, \dots$, 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

八、(本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 且导函数 $f'(x)$ 在该区间上有界. 证明函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

九、(本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续可微, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 递减地趋近于零, 证明: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是 $\int_a^{+\infty} x f'(x) dx$ 收敛.