

四川理工学院 2019 年研究生入学考试业务课样卷

(满分: 150 分, 所有答案一律写在答题纸上)

招生专业: 基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论

考试科目: 高等代数

考试时间: 3 小时

一、填空题 (每题 5 分, 共 30 分)

1、已知 n 阶矩阵的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 均不为 0, 则 $|A^{-1}| =$ _____。

2、欧氏空间 \mathbb{R}^4 中, 内积按通常定义, 则, 当 $k =$ _____ 时, 向量 $(2, 0, 1, 3)^T$ 与向量 $(1, -2, 1, k)^T$ 正交。

3、已知 A 是三阶矩阵, 且 $|A| = 3$, 则 $\left| \frac{1}{3}A^* - 4A^{-1} \right| =$ _____。

4、设 \mathcal{A} 为线性空间 V 的线性变换, 请举出一个 \mathcal{A} 的不变子空间的例子

_____。

5、设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^{-1} =$ _____。

6、已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定二次型, 则参数 λ 的取值范围为_____。

二、计算题 (1—3 题每题 10 分, 4、5 题每题 15 分, 共 60 分)

1、已知三元非齐次组系数矩阵的秩为 1, 且三个解向量满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$\alpha_2 + \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 + \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, 求该非齐次组的通解, 并找出一个满足条件的

方程组。

2、设 σ 是 R 上线性空间 R^3 的线性变换, $\forall \alpha = (x, y, z) \in R^3$, $\sigma(\alpha) =$

$\sigma(x, y, z) = (2y + z, -2x + 3z, -x - 3y)$, 求 σ 的特征根与特征向量。

3、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, a 是实数, 且 $B = aA + E_3$ 是正定矩阵, 求实数 a 的范围。

范围。

4、试求 7 次多项式 $f(x)$, 使得 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^4$ 整除, 而 $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^4$ 整除。

5、计算 $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$ 。

三、证明题 (每题 15 分, 共 60 分)

1、设 B 是 $m \times n$ 的实矩阵, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 是实向量, 证明: 齐次线性方程组 $BX = 0$ 只有零解的充要条件是 $B^T B$ 为正定矩阵。

2、证明: 对任意 n 阶方阵 A, B , 等式 $AB - BA = E_n$ 都不成立。

3、设 α 是欧氏空间 V 的一个非零向量, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$ 满足条件

$$(\alpha_i, \alpha) > 0, \quad (\alpha_i, \alpha_j) \leq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j)$$

证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。

4、已知 $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

(1) 证明: V 是 $F^{2 \times 2}$ 的子空间;

(2) 定义 $\varphi: V \rightarrow V$, $X \rightarrow A^T X - X^T A$, 证明: $\varphi \in L(V)$;

(3) 求 V 的一组基, 并求 φ 在该组基下的矩阵。